

Chapitre 7

Additionner et soustraire

Il peut sembler surprenant d'avoir retardé autant l'apprentissage de l'addition et de la soustraction. En effet, d'autres concepts, tels la multiplication, la division et même la racine carrée ont déjà été abordés et sont traditionnellement vus après l'addition et la soustraction. Il ne faudra pas vous surprendre de modifications importantes dans la séquence traditionnelle d'apprentissages, il ne faudra pas non plus vous surprendre devant l'omission volontaire de certaines pseudo-définitions telles «diviser c'est partager» ou «la multiplication est une addition répétée». En fait, toutes ces modifications résultent de nombreuses années de recherches et il vous sera possible d'en constater les effets positifs.

En conséquence, nous ne saurions trop insister en vous recommandant de suivre le guide et d'éviter de travailler d'autres aspects des mathématiques avant que le temps soit venu. En guise d'exemple, l'apprentissage des tables d'addition ou de multiplication ne doit pas être abordé trop tôt. Il s'agit en effet d'un de ces apprentissages spectaculaires qui sert plus à épater le galerie qu'à développer une maîtrise adéquate des mathématiques.

Dans ce chapitre, nous abordons les derniers concepts fondamentaux de l'arithmétique. Ces concepts seront ensuite exploités ensemble au moment de mettre sur pied la numération positionnelle. En effet, jusqu'à maintenant, et ce sera le cas pour quelques chapitres encore, nous avons systématiquement évité de représenter les nombres plus grands que neuf en utilisant la numération positionnelle. Ce qui ne nous a pas empêché cependant de les représenter autrement, ainsi le nombre douze a été symbolisé par 3×4 . Dans ce chapitre, il pourra l'être par $6 + 6$ ou par $8 + 7 - 3 \dots$

Les symboles «+» et «-», inventés en 1489 ont d'abord servi à représenter une opposition. Ainsi, alors que 5 \$ ou +5 \$ peut représenter un avoir de cinq dollars, -5 \$ peut signifier une dette ou une dépense de cinq dollars. En mathématiques, chaque fois qu'il faut représenter une opposition, ce sont les signes «+» et «-» qui sont utilisés. Sur un thermomètre, +5°C est, par rapport à 0°C, à l'opposé de -5°C. Les nombres 5^2 et 5^{-2} illustrent une opposition. En effet, $5^2 = \frac{5 \times 5}{1}$ alors que $5^{-2} = \frac{1}{5 \times 5}$ et l'exposant zéro indique que les opposants sont de même force : $5^0 = \frac{5 \times 5}{5 \times 5} = 1$.

Dans un autre contexte, «oui» s'oppose à «non», l'affirmation s'oppose à la négation. Ainsi, les signes «+» et «-» placés devant une parenthèse indiquent que les signes «+» et «-» placés dans la parenthèse sont adéquats, si la parenthèse suit le signe «+» ou doivent être inversés si la parenthèse suit le signe «-». En guise d'exemples : $+(+5)$ ou $(+5)$ signifie que le signe «+» à l'intérieur de la parenthèse, doit être conservé. Donc $+(+5) = (+5)$. De la même façon $+(-2) = (-2)$. Mais un signe «-» devant une parenthèse a l'effet d'une négation, il signifie qu'il y a erreur, que les signes «+» et «-» situés à l'intérieur de la parenthèse doivent tous être changés pour leur opposé. Donc $-(+2) = (-2)$ et $-(-3) = (+3)$. Ceci est la façon d'exprimer en mathématiques une loi bien connue : deux négations valent une affirmation (C'est faux qu'il est impoli, donc il est poli.).

Dans ce chapitre, les signes «+» et «-» seront donc présentés à l'élève afin d'exprimer une opposition. Mais en fait, les expressions mathématiques qui seront vues peuvent tout aussi bien illustrer des additions et des soustractions. Tel est le sens du mot algèbre qui signifie tout est lié. Les chiffres et les symboles +, -, x, ÷... sont des symboles algébriques et peuvent donc être utilisés à de nombreuses fins. L'expression $5 - 2 = 3$ peut signifier qu'entre l'âge d'une personne de cinq ans et celui d'une autre de deux ans, il existe une différence de trois ans ou encore qu'en raccourcissant de deux mètres un tube de cinq mètres, on obtient un tube de trois mètres...

Profil

Compréhension : L'élève sera capable d'interpréter correctement les données des problèmes c'est-à-dire, dans ce chapitre, de classer en deux groupes les éléments du problème afin de déterminer quel groupe a plus d'éléments. De plus il interprétera des expressions numériques où figurent les symboles « + » et « - ».

Raisonnement : L'élève travaillera de façon systématique c'est-à-dire en tenant compte de chaque donnée des problèmes, en organisant son matériel de façon ordonnée et en tirant les conclusions justes.

Efficacité : L'élève dénumbrera les quantités correctement. Il connaîtra le sens des symboles « + » et « - » et il lira et écrira des expressions numériques où figurent les signes « + » et « - ».

Matériel

- Environ 50 jetons ;
- Un bout de ficelle d'environ 30 centimètres ;
- 2 cartons de 5 cm sur 5 cm, le premier avec un symbole « + » et le second avec un symbole « - ».

Problème 1

Au moyen de la ficelle, partagez la surface de travail de l'élève en deux régions, une à sa droite, une à sa gauche.

Dites-lui que vous allez faire comme si sa surface de travail représentait un terrain immense où deux grandes compagnies vont construire des maisons. Placez à sa portée les jetons qui représenteront les maisons.

Dites-lui que durant le premier mois, une compagnie a construit huit maisons alors que l'autre en a construit six et demandez-lui de montrer cela avec ses jetons.

Note : Il se peut que l'élève dispose huit jetons à gauche de la ficelle et six à droite, ou l'inverse, sans vous demander où travaillait chaque compagnie. Si cela se produit, laissez-le finir et mentionnez alors qu'il s'est trompé, que ce qui est à droite de la ficelle devrait être à gauche et vice versa. Faites cela, quelle que soit sa solution afin de lui faire changer la position des jetons.
Si l'élève vous demande d'abord où travaillait chaque compagnie, dites-lui que la compagnie qui travaillait à droite était celle qui a construit huit maisons.

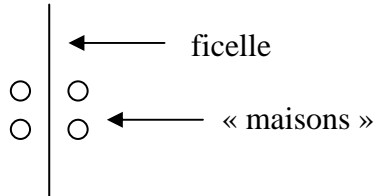
Lorsque ses jetons auront été placés, demandez-lui quelle compagnie a construit le plus de maisons. Ensuite, demandez-lui combien cette compagnie a construit de maisons de plus.

Note : Cette dernière question conduit souvent à de grandes difficultés. En fait l'élève ne sait comment interpréter l'expression « de plus ». Vous devez donc être très « physique » dans votre illustration de cette expression afin de lui laisser une image mentale claire.

Procédez comme suit si l'élève n'a pu répondre correctement et avec conviction à la dernière question.

Pointez un jeton de chaque côté de la ficelle. Dites à l'élève : « Voici la première maison construite par chaque compagnie. Je vais les placer une à côté de l'autre, le long de la ficelle. »

Prenez deux autres maisons, procédez comme précédemment et alignez ces nouvelles maisons près de la ficelle et des maisons déjà placées comme suit :



Demandez à l'élève de continuer ce que vous avez commencé.

Lorsque six maisons seront situées de chaque côté de la ficelle, montrez à l'élève qu'il en reste deux d'un côté. Dites-lui : « Tiens, c'est bien cette compagnie qui a construit plus de maisons. Voici les deux maisons de plus, elle a construit ces deux maisons en plus. L'autre compagnie n'a pas construit autant de maisons, il lui en manque deux, elle a construit deux maisons de moins. »

Insistez sur ce qui précède, n'hésitez pas à répéter et à redire de façon différente.

Problème 2

Note : La présentation de ce problème est la même que celle du problème précédent. Pour chaque cas, et ce tant que l'élève ne vous demandera pas, avant de placer ses jetons, où se situe la compagnie qui a construit telle quantité de maisons, laissez l'élève placer ses jetons et annoncez-lui à la fin qu'il s'est trompé de côté.

À partir du moment où il vous demandera quelle compagnie a fait quoi, vous identifierez les compagnies et leur travail. À ce moment, posez le carton avec le symbole « + » à droite de la ficelle et celui avec le symbole « - » à gauche de celle-ci. Dites à l'élève que ces symboles vont servir à identifier les deux compagnies. C'est un peu comme un drapeau, un logo, un emblème tel qu'on en retrouve sur les chandails des sportifs.

À partir de ce moment, au lieu de dire qu'une compagnie a construit disons cinq maisons et que l'autre en a construit huit, vous direz que la compagnie des Plus en a construit cinq et que la compagnie des Moins en a construit huit (par exemple).

Voici les cas à soumettre, les symboles « + » et « - » mentionnent le travail de la compagnie des Plus et celui de celle des Moins. Référez-vous à la note précédente afin de savoir quand vous commencerez à parler de la compagnie des Plus et de celle des Moins.

- a) +6 et -9 (Donc six maisons à droite et neuf à gauche, c'est la compagnie située à gauche qui a fait le plus de maisons, elle en a fait trois de plus.)
- b) -4 et +5
- c) -7 et +7
- d) +3 et -5
- e) +4 et -0

Ajoutez quelques cas au besoin.

Problème 3

Dans ce problème, vous allez introduire la symbolisation. La pertinence de la représentation écrite se manifeste au moment où il y a possibilité d'oublier et c'est à partir de cette possibilité que l'élève va apprendre à noter certaines données.

Dites à l'élève qu'après un mois, la compagnie des Moins avait construit trois maisons de plus que la compagnie des Plus. Demandez-lui d'illustrer avec ses jetons ce que chaque compagnie avait peut-être construit.

Lorsqu'il aura trouvé une possibilité, demandez-lui s'il y en a une autre.

Laissez-le trouver une autre solution.

Dites-lui alors que vous avez oublié ce qu'il fallait trouver, s'en souvient-il ?

Pour ne pas oublier, écrivez « -3 » et dites-lui que ceci signifie que c'est la compagnie des Moins qui a fait trois maisons de plus que l'autre.

Note : Ne vous inquiétez pas du fait que l'on note -3 pour signifier qu'une compagnie en a fait trois de plus. Contentez-vous de bien expliquer que le « - » représente la compagnie et le « 3 » le nombre de maison que cette compagnie a fait en plus.

Lorsque vous noterez $+2$, cela signifiera aussi qu'une compagnie en a fait plus, cette fois c'est la compagnie des Plus, mais cela signifie forcément aussi que la compagnie des Moins en a fait 2 de moins.

Laissez l'élève trouver quelques solutions. Lorsqu'il trouvera la cinquième solution, demandez-lui si elle n'a pas déjà été trouvée. Manifestez un doute et indiquez qu'il faudrait symboliser aussi les solutions.

Problème 4

Comme au problème précédent, mais cette fois, vous allez représenter aussi les solutions. Voici ce que vous pourriez obtenir à la fin d'un problème :

- 4 (Qui signifie que la compagnie des Moins fera 4 maisons de plus.)
- 9 +5 (Qui montre une possibilité : les Moins ont fait 9 maisons et les Plus, 5.)
- 5 +1 (Qui montre une autre possibilité : les Moins ont fait 5 maisons et les Plus, 1.)
- 4 +0 ...

Etc.

Ce qui précède indique que la compagnie des Moins a construit quatre maisons de plus. Les lignes suivantes montrent diverses possibilités qui respectent ce que le problème demande.

Note : Il n'est pas important que la colonne de gauche montre ce qu'a construit la compagnie qui a fait le plus de maisons. En fait, d'un problème à l'autre, vous devriez alterner ces positions. Par contre, dans le même problème (ici pour -4), placez-les toujours de la même façon.

Alors, présentez quelques problèmes à l'élève en rédigeant chaque fois un tableau semblable à celui trouvé plus haut. Lorsque l'élève répète une solution, mentionnez-lui qu'elle est correcte, mais, en lui montrant où elle a été notée, ajoutez qu'elle déjà été trouvée.

Cas suggérés :

- a) +2
- b) -1
- c) +5
- d) +0
- e) -3
- f) -4
- g) +6
- h) -7

Ajoutez des cas au besoin.

Problème 5

Montrez à l'élève les tableaux suivants en lui disant qu'on a oublié la première ligne, celle qui montre quelle équipe a fait le plus de maisons et combien de maisons de plus elle a construit. Demandez-lui de trouver et de noter sur une feuille de papier la ligne oubliée. Demandez à l'élève d'utiliser ses jetons pour vous prouver ses solutions.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad -4 \quad +2 \\ \quad \quad -6 \quad +4 \\ \quad \quad -2 \quad +0 \\ \quad \quad -5 \quad +3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b)} \quad -6 \quad +9 \\ \quad \quad -2 \quad +5 \\ \quad \quad -3 \quad +6 \\ \quad \quad -1 \quad +4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c)} \quad +5 \quad -8 \\ \quad \quad +4 \quad -7 \\ \quad \quad +3 \quad -6 \\ \quad \quad +2 \quad -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{d)} \quad +7 \quad -3 \\ \quad \quad +5 \quad -1 \\ \quad \quad +8 \quad -4 \\ \quad \quad +9 \quad -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{e)} \quad +0 \quad -5 \\ \quad \quad +1 \quad -6 \\ \quad \quad +2 \quad -7 \\ \quad \quad +3 \quad -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{f)} \quad -9 \quad +8 \\ \quad \quad -5 \quad +4 \\ \quad \quad -3 \quad +2 \\ \quad \quad -1 \quad +0 \end{array}$$

Problème 6

Reprenez les tableaux du problème 5 et demandez à l'élève de trouver une possibilité qui a été oubliée dans chaque tableau.

Problème 7

Voici des rapports qui indiquent le travail réalisé par les compagnies des Plus et des Moins durant trois mois consécutifs. À la fin de chaque période de trois mois, l'élève doit trouver et symboliser quelle compagnie a fait le plus de maisons et combien elle en a construit de plus.

Premier mois : -4, +6, Deuxième mois : -5, +4, Troisième mois : +5 et -7 ,(Solution -1)

Note : L'élève doit placer les jetons de part et d'autre de la ficelle. Écrivez les données du problème sur une feuille et montrez-lui cette feuille en lisant ces données pour les problèmes (a), (b) et (c).

À compter du problème (d), laissez-le lire seul dans votre guide. Sur une autre feuille, il notera la solution, ce n'est pas encore le temps de noter comme suit : $-4 + 6 -5 +4 + 5 - 7 = -1$.

L'élève a le choix des moyens pour solutionner ces problèmes.

- b) +2, -5, -4, +6, +3, -4 (Solution -2)
- c) +6, -4, +5, -8, -4, +9 (Solution +4)
- d) -7, +5, -6, +3, -4, +0
- e) +3, -2, +0, -2, -6, +5
- f) -6, +4, -8, +9, -5, +1
- g) -3, +3, +5, -5, -6, +8
- h) +4, -5, +5, -3, +3, -4

Proposez d'autres problèmes si nécessaire.

Problème 8

Voici une liste de problèmes qui permettent de généraliser ce qui a été vu dans ce chapitre. L'élève doit illustrer chaque problème en plaçant des jetons du côté des « + » et du côté des « - » et conclure de quel côté se retrouve le plus grand nombre.

Note : Bien que nous soyons tenté de représenter une dette de 5 \$ par -5 \$ et un actif de 5 \$ par $+5$ \$, les symboles « + » et « - » pourraient être utilisés de façon inverse. C'est pour cette raison qu'on parle d'entiers relatifs. Ainsi, il ne faudra pas s'inquiéter si l'élève décide autrement que ce qui est régulièrement convenu. Considérez le « + » et le « - » comme des emblèmes et non comme la représentation de nombres positifs et de nombres négatifs tels qu'utilisés en finances ou en météo. Agir autrement ne serait pas cohérent avec les activités de ce chapitre et pourrait entraîner des confusions chez l'élève.

- a) Lors d'une partie de hockey, les Canadiens ont marqué trois buts et l'Avalanche en a marqué cinq. Qui a gagné et par combien de buts ?
- b) Demandez à l'élève de vous illustrer ce problème en décidant d'abord quelle équipe sera l'équipe des Plus et laquelle sera l'équipe des Moins. Ensuite, il devra disposer ses jetons selon les données du problème et sa convention de position. Demandez-lui de noter les données du problème (-3 , $+5$ ou -5 , $+3$ ou $+3$, -5 ou $+5$, -3) et le gagnant avec les nombres de buts qui l'ont avantage (-2 ou $+2$). Agissez de la même façon pour les problèmes qui suivent.
- c) Jacques a huit ans et Marie a cinq ans. Qui est plus âgé et par combien d'années ?
- d) Pour un cadeau, je dois payer six dollars. J'ai huit dollars, est-ce que j'en ai assez ?
- e) Dans un groupe d'amis, il y a quatre filles et trois garçons. Quel est le groupe qui a le plus de personnes et de combien ?
- f) Un édifice a huit étages et l'édifice voisin en a cinq. Quel édifice est le plus grand et combien d'étages a-t-il de plus que l'autre édifice ?
- g) Dans un panier il y a six pommes et sept prunes. Quelle sorte de fruit y a-t-il en plus et de combien ?
- h) Cinq personnes préfèrent faire des casse-tête alors que les trois autres personnes du même groupe préfèrent dessiner. Quel est le loisir favori de ces personnes et combien de personnes de plus préfèrent ce loisir ?
- i) Dans une maison, il y a sept fenêtres au rez-de-chaussée et quatre fenêtres au sous-sol. Où y a-t-il le plus de fenêtres et combien de plus ?
- j) Ce matin, un cycliste a parcouru neuf kilomètres. Cet après-midi, il en a parcouru sept. Quand a-t-il parcouru le plus de kilomètres et combien de plus ?

Note : Si l'élève ignore ce qu'est un kilomètre, dites-lui que c'est la distance que l'on parcourt entre votre domicile et... le dépanneur, peut-être ?

Au besoin, inventez d'autres problèmes semblables.

Problème 9

Cette fois, il s'agit de faire l'inverse du problème 8. Vous inscrivez des symboles et l'élève invente un problème tout en l'illustrant avec ses jetons.

- a) $+4$, -1 (Solution : Par exemple : Martin a quatre balles et Jacynthe en a une. Et l'élève conclura ensuite que Martin en a trois de plus.)

Note : Ne vous attendez pas à ce que l'élève formule une question après avoir énoncé les données du problème. Les élèves de six ans et de sept ans ont habituellement tendance à illustrer le problème et à le solutionner sans verbaliser l'énoncé de la question. N'insistez pas afin de leur faire formuler une question.

Incitez l'élève à changer de thème en passant d'un problème à un autre.

- b) -5 , $+8$
- c) $+9$, -9

d) $-4, +0$

e) $-3, +2$

f) $+6, -1$

g) $+7, -9$

h) $+8, -2$

Ajoutez d'autres problèmes au besoin.