

LES MATHÉMATIQUES À LA MAISON

VOLUME 1

ROBERT ET MICHEL LYONS

(Octobre 1999)

Introduction

Une remise en question

Pour la majorité des gens, l'enseignement consiste principalement d'abord à expliquer avec patience, ensuite à proposer des exercices d'appropriation en quantité suffisante, mais non excessive, et enfin à évaluer les apprentissages. Dans une telle optique, l'enseignant transmet sa compréhension, ses connaissances et ses habiletés à l'élève. En guise de réponse, l'élève essaie d'imiter le mieux possible les compétences de l'enseignant.

Malheureusement, cette façon de voir et d'exercer l'enseignement donne des résultats qui sont nettement inférieurs aux possibilités réelles des élèves. En fait, le processus d'enseignement décrit plus haut ne permet que rarement à l'enseignant de comprendre la pensée de l'élève et partant, de l'aider le plus efficacement possible.

Il faut savoir que, d'un individu à l'autre, les façons d'apprendre diffèrent. Il faut savoir que, d'un individu à l'autre, les façons de penser diffèrent. Il faut savoir que, d'un individu à l'autre, les rythmes d'apprentissage diffèrent.

Prenons un exemple. Imaginons un groupe d'élèves d'environ douze ans. À cet âge, ils ont appris à additionner, à soustraire et à multiplier des fractions. Imaginons qu'ils sont prêts à aborder l'apprentissage de la division de fractions. Vous êtes l'enseignant et vous devez donc les guider dans ce nouvel apprentissage. Comme premier cas, vous proposez la division suivante :

$$\frac{9}{20} \div \frac{3}{4} =$$

« Trop difficile ! » pensez-vous ? Ce n'est pas sûr, mais si vous insistez, voici une autre suggestion :

$$\frac{6}{7} \div \frac{2}{7} =$$

Soulagé ? Bon ! Alors que faites-vous maintenant ? Prenez le temps d'y penser, choisissez la première ou la seconde division et tentez d'imaginer ce que vous allez dire aux élèves.

Pensez-y au moins une minute (c'est important!) avant d'effectuer, par écrit, les deux divisions précédentes, en notant tous vos calculs.

La pensée d'un élève de douze ans n'est pas très éloignée de celle d'un adulte et pourtant, devant un nouvel apprentissage, il manifeste souvent des comportements étonnants. Le

problème, c'est que si l'enseignant agit selon le modèle traditionnel décrit plus haut, il a peu de chances de connaître et de comprendre la pensée et les stratégies de l'élève.

Revenons aux divisions de fractions et à votre façon de les enseigner qui ressemble sans doute à celle qui était utilisée par ceux qui vous ont enseigné. C'est normal, nous l'avons vu, en enseignement traditionnel, l'élève imite l'enseignant.

Ainsi donc, vous avez probablement imaginé comment expliquer à l'élève que pour diviser une fraction par une autre, il suffit d'inverser la seconde avant de la multiplier par la première.

En conséquence :	$\frac{9}{20} \div \frac{3}{4} =$	
devient	$\frac{9}{20} \times \frac{4}{3} =$	(inversion et multiplication)
puis	$\frac{3}{5} \times \frac{1}{1} =$	(après simplification)
et enfin	$\frac{3}{5}$	(car $3 \times 1 = 3$ et $5 \times 1 = 5$)

Intéressant ! Un peu long, plutôt compliqué et très surprenant pour un élève de douze ans qui, pour la première fois, devant une division, doit la remplacer par une multiplication sans oublier la culbute doit effectuer la seconde fraction.

Essayons de procéder autrement. Oublions les explications, n'essayons pas de penser pour l'élève, soumettons-lui le problème sans aucune préparation que ce qu'il sait déjà sur les opérations et sur les fractions. Plus encore, inversons les rôles et demandons-lui de nous enseigner comment il pense que les divisions précédentes doivent être effectuées.

C'est un exercice auquel nous nous sommes livrés à plusieurs reprises pour constater que rapidement, et surtout sans notre aide, les élèves ont calculé :

$$\frac{9}{20} \div \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \quad (\text{car } 9 \div 3 = 3 \text{ et } 20 \div 4 = 5)$$

et

$$\frac{6}{7} \div \frac{2}{7} = \frac{3}{1} = 3 \quad (\text{car } 6 \div 2 = 3 \text{ et } 7 \div 7 = 1)$$

Vous y aviez pensé ? Si oui, vous n'avez pas réagi comme l'immense majorité des adultes face à ces divisions. Sinon, vous ne pensez vraiment pas comme un élève de douze ans. En passant, il n'y a rien d'inquiétant pour vous à vous situer dans l'une ou l'autre des catégories précédentes...

Bon, vous avez probablement eu le temps de penser à quelques objections face à cette technique imaginée pas les élèves de douze ans et ce même si, dans les cas proposés, elle fonctionne. Vous pensez à des cas différents.

Prenons $\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} =$

C'est le genre de divisions que nous proposons aux élèves qui ont d'abord divisé tel que décrit plus haut, c'est-à-dire directement, sans culbute ni multiplication.

Essentiellement, ils réagissent de deux façons différentes. Quelques-uns proposent de placer ces fractions sur le même dénominateur, comme ils le faisaient en addition et en soustraction de fractions. Ils obtiennent :

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} \rightarrow \frac{8}{12} \div \frac{9}{12}$$

Habituellement, ils divisent les dénominateurs ($12 \div 12 = 1$) mais ne savent pas comment s'en tirer avec les numérateurs ($8 \div 9 = ?$). Il vous suffit de leur indiquer comment noter cela :

$$\frac{8}{12} \div \frac{9}{12} = \frac{8/9}{1}$$

et $\frac{8/9}{1} = \frac{8}{9}$ (car diviser par 1 ne change rien)

D'autres élèves préfèrent modifier la première fraction ($2/3$) afin que chacun de ses termes se divise par son correspondant dans la fraction $3/4$. Ils proposent :

de changer d'abord $\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}$

en $\frac{6}{9} \div \frac{3}{4}$ (car $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$)

et ensuite en $\frac{24}{36} \div \frac{3}{4}$ (car $\frac{6}{9} = \frac{24}{36}$)

ils divisent et obtiennent $\frac{24}{36} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$ (car $24 \div 3 = 8$ et $36 \div 4 = 9$)

Ce procédé est plus long que la technique de la culbute, mais il démontre :

1. que les élèves peuvent générer seuls leurs propres techniques de calcul ;
2. que les techniques inventées par les élèves peuvent être inconnues de la personne qui leur enseigne ;
3. que la pensée de l'élève diffère très souvent de celle de l'enseignant ;
4. que ce n'est qu'en inversant les rôles (l'élève explique, l'enseignant tente d'apprendre et de comprendre) qu'il est possible de pratiquer un enseignement efficace où l'élève comprend ce qu'il fait parce qu'il l'invente lui-même (Vous savez pourquoi, au lieu de diviser par une fraction, il faut multiplier par son inverse ?) ;
5. que le nombre d'exercices réalisés (Combien de division de fractions avez-vous effectuées à l'école ?) ne permet pas de comprendre mais qu'il augmente la rapidité en empêchant l'élève de se poser des questions, en le rendant aveugle (Regardez les divisions de fractions :

$$\frac{9}{20} \div \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

et

$$\frac{6}{7} \div \frac{2}{7} = \frac{3}{1} = 3$$

Comment est-ce possible que nous n'ayons jamais remarqué qu'elles pouvaient être effectuées aussi simplement ?)

6. que, si l'élève est capable d'inventer seul, après quelques minutes de réflexion, une technique de calcul, il devient inutile de lui soumettre autant d'exercices pour qu'il s'en souvienne.

Dans le texte qui suit, vous verrez comment enseigner les premiers concepts mathématiques que les enfants de cinq, six et sept ans doivent développer.

Dans ce but, votre travail ressemblera à ce qui a été vu ci-haut et qui permet aux élèves d'inventer des techniques efficaces de division de fractions. En passant, nous allions l'oublier, aucun élève ne nous a jamais proposé de diviser des fractions par la technique traditionnelle. Cependant, après que les élèves aient inventé leurs techniques, nous leur avons présenté la nôtre, qui est sûrement la vôtre, la technique de la culbute. Ils ont été intéressés et un peu étonnés. Certains ont adopté notre technique, d'autres ont gardé la leur et d'autres enfin utilisent l'une ou l'autre selon les divisions proposées.

Les chapitres qui suivent vous indiquent donc une marche à suivre. De grâce, essayez de la respecter. N'introduisez le vocabulaire et le symbolisme qu'aux moments indiqués. L'apprentissage n'est pas un sprint, mais un marathon. Et pourtant, vous verrez que les élèves apprennent très vite. En fait, si vous essayez d'abord et avant tout de comprendre leur pensée (et c'est ce vous devez faire), vous risquez de vous essouffler plus vite que les élèves. Entre eux et vous cependant, parions que vous serez la personne la plus émerveillée. Vous vivrez avec vos élèves ou avec votre enfant une merveilleuse aventure, celle de l'apprentissage.